代数幾何学シンポジウム記録
1983年度 pp.96-112

高次元代数多様体の contraction と cone theorem

川又 雄二郎

高次元の代数多様体を双有理同値類によって分類しようという問題を考えます。まず小平次元と飯高ファイバリング定理によって荒っぽい分類ができますが，更に詳しく調べようとすると極小モデル (minimal model) の理論が必要になってきます。2次元の場合，つまり曲面論について復習してみましょう。非特異完備曲面 S から出発します。S 上の既約曲線 E は $(E^2)=(K_S\cdot E)=-1$ (但し K_S は canonical 因子) をみたすとき第1種例外曲線 (又は (-1)-curve) といいます。S が (-1)-curve を含まないとき S は minimal といいます。もしも (-1)-curve があったら双有理正則写像 $S \rightarrow S'$ があってこれをつぶすことができます。$\rho(S') \geqq \rho(S)-1>0$ (ρ は Picard 数) なので有限回このような "contraction" をやれば minimal model に到達できるわけです。即ち任意の代数曲面にはそれと双有理同値な minimal 曲面が存在するわけです。ここで小平次元 etc. は双有理不変量であることをおもい出しておきます。さて S を minimal 曲面とすると，まず

$$\kappa(S) \geqq 0 \iff K_S \text{ は nef}$$

がわかります。ここで nef というのは numerically effective を短く言ったもので，$(K_S\cdot C) \geqq 0$ $\forall C$ curves on S を意味します。正しくは numerically semi-positive と言った方がよいでしょう。更に K_S nef の場合は linear system $|mK_S|$ $(m\in \mathbb{N})$ の構造がよく調べられていて大変よくわかっています (Enriques-Kodaira の

分類理論)。このことから有名な曲面の分類表が得られます。minimal model は曲面論の出発点であったわけです。

さて,これを高次元の場合に拡張しようとするといろいろと困難が出てきます。以下の議論で小平型の消滅定理を使うので基礎体の標数は 0 とします。また簡単のため閉体上で考えます。閉体でないときも実は同様の結果が成立します。詳しくは拙著 "Cone of curves of algebraic varieties" を参照して下さい。高次元の困難には次の2つがあります。森氏の画期的な理論により,3次元非特異射影多様体 X から出発して,1回だけつぶす contraction $X \to X'$ の存在が証明されました。これは2次元の場合の (-1)-curve の contraction の自然な拡張になっているわけですが,この段階で既に5種類(もしくは 8 or 10 種類 —— 数え方はいろいろある)もあり,更に X' は必ずしも非特異とならないという新現象が出てきました。第2の困難は,X から極小モデルへの双有理写像が必ずしも正則とならないということです。これはまず Francia 氏が例をつくりましたが,Reid 氏によりかなり一般化されています。角田氏の曲面の退化の理論もこの現象を扱っています。この論文ではこの第一の困難を解決するのが目的です。即ち,X (非特異とは限らない) が minimal でなければ good extremal ray が存在し (cone theorem),しかもそれはつぶせる (contraction theorem) ということです。minimal model に至るには更に "elementary transformation" に関する "定理" が必要となります。また X が一般型の minimal model のときはその canonical ring が

有限生成であることも示されます。証明の方法は先にも述べた消滅定理をフルに使います。標数 p の議論は使わないのが森理論と異るところです。また，以下の結果は"branch付"の多様体にも成立し，ある程度"log"の理論にも拡張できますが，これは簡単のため省略します。これも前掲の本論文を参照して下さい。

以下の予定は §1 で notation と definition を述べ，特に minimal model の"定義"をします。次に §2 で主定理2つとその他の定理を述べ，§3 で証明の概略を述べます。

§1 定義その他

$\pi : X \longrightarrow Z$ を射影多様体の全射正則写像でファイバーは連結とします。Xは正規とします。

numerical equivalence

$$N_1(X) = \{\text{1-cycles on } X\}/\approx \otimes \mathbb{R}$$

$$N^1_{\mathbb{Q}}(X) = \{\text{line bundles on } X\}/\approx \otimes \mathbb{Q}$$

$$N^1(X) = N^1_{\mathbb{Q}}(X) \otimes \mathbb{R}$$

$$\overline{NE}(X) = \text{closed convex cone in } N_1(X) \text{ generated by effective 1-cycles}$$

$$\overline{NE}_D(X) = \{ z \in \overline{NE}(X) ;\ (D.z) \geq 0 \} \quad (D \in N^1(X))$$

と森理論と同様に定義します。更に，証明の必要上より relative version も定義します。

$N_1(X/Z) =$ Zへ行くとつぶれる curve で生成された $N_1(X/Z)$ の部分空間

$$N^1(X/Z) = N^1(X)/N_1(X/Z)^{\perp}$$

$$N^1_{\mathbb{Q}}(X/Z) = \text{image of } N^1_{\mathbb{Q}}(X) \text{ in } N^1(X/Z)$$

$\overline{NE}(X/Z) =$ Zでつぶれる curve で生成された closed convex cone in $N_1(X/Z)$.

$D \in N^1(X)$ が nef $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $(D.z) \geq 0$ for $\forall z \in \overline{NE}(X)$

更に big $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $(D^n) > 0$, $n = \dim X$

$D \in N^1(X/Z)$ が relatively nef

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $(D.z) \geq 0$ for $\forall z \in \overline{NE}(X/Z)$.

Kleiman's criterion [4]

$H \in N^1_{\mathbb{Q}}(X/Z)$ が relatively ample

$\Longleftrightarrow$ $(H.z) > 0$ for $\forall z \in \overline{NE}(X/Z) - \{0\}$.

$\mathrm{Div}(X) = X$ 上の Weil 因子の群

$K_X = X$ 上の canonical 因子

$D \in \mathrm{Div}(X)$ に対して $\mathcal{O}_X(D) = i_* \mathcal{O}_{X_{reg}}(D/X_{reg})$

但し, $i : X_{reg} \hookrightarrow X$.

例えば $\mathcal{O}_X(K_X) = \omega_X$ = canonical sheaf.

$\mathbb{Q}$-divisor $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{Div}(X) \otimes \mathbb{Q}$ の元

これが $\mathbb{Q}$-Cartier $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 何倍かすれば Cartier になる

X が $\mathbb{Q}$-Gorenstein $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ K_X が $\mathbb{Q}$-Cartier

$\mathbb{Q}$-Cartier divisor = $\mathbb{Q}$-Cartier な $\mathbb{Q}$-divisor

$\mathbb{Q}$-divisor $D = \sum r_i D_i$ ($r_i \in \mathbb{Q}$, D_i: 素因子)

に対して,

$[D] = \sum [r_i] D_i$ (切りすて)

$\{D\} = D - [D]$ (分数部分)

$\ulcorner D \urcorner = -[-D]$ (切り上げ)

消滅定理 X は非特異射影多様体, $D \in \mathrm{Div}(X) \otimes \mathbb{Q}$,

D は nef で big, $\{D\}$ の台は正規交叉とする。このとき

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(\ulcorner D \urcorner + K_X)) = 0 \quad \text{for } i > 0.$$

([2][10])

序文で述べましたように以下の議論ではある種の特異点をもった多様体が必然的に登場してきます。Reid氏は次のような定義をしました：X が canonical (resp. terminal) な特異点をもつとは

(1) X は $\mathbb{Q}$-Gorenstein

(2) ある特異点除去 $f: Y \to X$ が存在して

$$K_Y = f^*K_X + \sum a_i F_i \quad (a_i \in \mathbb{Q})$$

ここで $\forall a_i \geq 0$ (resp. $\forall a_i > 0$) が成立。

(F_i は X でつぶれる Y 上の全ての素因子について考える)。

(1)より K_X は $\mathbb{Q}$-Cartier なので $\mathbb{Q}$-divisor としてひき戻せることに注意しておきます。

X が一般型で，しかもその canonical ring

$$R = \oplus_{m \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))$$

が有限生成のときは その canonical model $X_{can} = \mathrm{Proj}\, R$ は丁度上記の canonical singularities をもつことがわかります。terminal singularities というのはその特殊な場合ですが，minimal model 上に現われる特異点であると信じられています。これがうまくいくかどうかは minimal model の理論が完成するまでは何とも言えません。Elkik 氏は canonical singularities は全て rational sing. になることを示しました [11]

次に extremal ray について説明します。これは (-1)-curve を高次元に拡張したものに相当します。証明上の都合から全て relative な場合を考えます。Z=point とすると relative のとれた absolute case になります。$L \in N^1_{\mathbb{Q}}(X)$ が good relative supporting function

であるとは $\underbrace{}_{}$ Lが relatively nef で $F = L^{\perp} \cap \overline{NE}(X/Z) - \{0\}$ が空でなくしかも半空間 $\{z \in N_1(X/Z) ; (K_X . z) < 0\}$ に完全に含まれるときとします。ここで L の直交 $L^{\perp}$ は $\{z \in N_1(X/Z) ; (L, z) = 0\}$ です。このとき F を *good relative face* と言います。F の次元（つまり F が生成する $N_1(X/Z)$ の部分空間の次元）が 1 のとき特に *good relative extremal ray* と呼びます。ここで *good* というのは F が cone $\overline{NE}(X/Z)$ の面であるというだけでなくちゃんとそれを支持する関数 L が存在するていうことを示しています。残りの半空間 $\{z \in N_1(X/Z) ; (K_X . z) \geq 0\}$ については何も言いません。曲面の場合には *good extremal ray* は (-1)-curve, 0-curve, 1-curve のいずれかではられることが知られています (cf. Mori).

最後に *minimal model* を"定義"します。X が *minimal model* であるとは

(1) X は $\mathbb{Q}$-*factorial* で *terminal singularities* をもつ

(2) K_X は *nef*

ここで $\mathbb{Q}$-*factorial* とは X 上の任意の $\mathbb{Q}$-*divisor* が $\mathbb{Q}$-*Cartier* になるときにいいます。この条件は結果的にそうなっているらしいということであまり根拠はありません。$\mathbb{Q}$-*factorial* でない多様体は扱いが難かしく議論がうまくいきません。またこの条件は代数的局所環の条件ですが，その下にある複素構造には遺伝しません。今一つよくわからない条件ですが，もう少しよくわかるようになるとよいと思います。上の X はこの § の初めから仮定しているように射影的とします。非射影的多様体がたくさん出てくるのも高次元的現象ですが，Kleiman の判定法を使うこともあり射影性が基本的です。

§2. 主定理その他

Contraction Theorem

X: 正規射影多様体で canonical singularities のみをもつ

D: X 上の nef な Cartier 因子で $aD-K_X$ も nef で big ($a \in \mathbb{N}$)

$\Longrightarrow$ linear system $|mD|$ は $m \gg 0$ のとき free
(即ち, fixed component をもたず base point もない)

Weak Cone Theorem

$\pi: X \to Z$ 正規射影多様体の全射正則写像

X: canonical singularities のみをもつ

$$\Longrightarrow \overline{NE}(X/Z) = \left(\overline{NE}_{K_X}(X/Z) + \sum R_i\right)^{-}$$

ここで R_i は good relative extremal ray で $^{-}$ は普通の real topology による closure.

特に K_X が relatively nef でなければ少くとも1つの good extremal ray が存在する.

主定理で weak と言ったのは, R_i が locally に finite つまり $\overline{NE}(X/Z)$ が K_X が負の側で locally polyhedral になることを主張していないからです (cf. 森理論)。しかしここで重要なのは good extremal ray の存在だけでこれはOKです。証明の順序は森理論のときのように cone をまず求めるわけではなく, contraction の方が先になります。
(1) non-vanishing (2) contraction (3) rationality (4) stability (5) cone の順にやります。実は一番初めに証明できたのは contraction で, あとは同じ論法のくり返しです。読者

の中には 1つの定理にまとめられないかと思われる方もあるかもしれません。
まず contraction theorem をどう使うかを示します。2つの応用があります。

<u>系1</u>　R を $\overline{NE}(X)$ の good extremal ray とする。
このとき全射正則写像 $\varphi : X \longrightarrow W$ で連結なファイバーをもち次の条件をみたすものが唯一つ存在する：

C curve on X,　$\pi(C) = \text{point} \Longleftrightarrow cl(C) \in R$.

<u>系2</u>　X は canonical singularities をもつ射影多様体で $\kappa(X) = \dim X$ かつ K_X は nef とする。このとき canonical ring　$R = \oplus_{m \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))$ は有限生成.

系1は Rのかわりに good face F でも OK です。Kleiman の判定条件を使えば contraction theorem より φ が得られます。系2が実は初めに得られた結果でした。あとに述べる stability theorem をつかえば good relative face もつぶせることがわかります。このことは角田氏のやっている退化理論に応用されます。

<u>Non-vanishing</u>

X：非特異射影多様体

$D_1, D_2, D_3 \in Div(X)$;　$A \in Div(X) \otimes \mathbb{Q}$

$r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $r \notin \mathbb{Q}$;　$\varepsilon_0 > 0$, $a \in \mathbb{N}$

条件 (1)　D_3 は nef

(2)　$\forall p, q \in \mathbb{N}$ s.t. $q - pr < \varepsilon_0$, $q \geq a$

$\exists s \in \mathbb{N}$,　$pD_1 + qD_2 + sD_3 + A - K_X$ nef & big

(3) $\ulcorner A \urcorner \geq 0$, $\{A\}$の台は正規交叉

$\Longrightarrow$ $\exists \varepsilon > 0$

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(pD_1 + qD_2 + sD_3 + \ulcorner A \urcorner)) \neq 0$$

for $q - pr < \varepsilon$, $0 \ll q \ll s$.

系3(Shokurov):

X 非特異射影多様体

$D \in \mathrm{Div}(X)$; $A \in \mathrm{Div}(X) \otimes \mathbb{Q}$; $a \in \mathbb{N}$

Dはnef, $aD + A - K_X$ は nef & big

$\ulcorner A \urcorner \geq 0$, $\{A\}$の台は正規交叉

$\Longrightarrow$ $H^0(X, \mathcal{O}_X(pD + \ulcorner A \urcorner)) \neq 0$ for $p \gg 0$.

(∵) 上の定理で $D = D_1 = D_2 = D_3$ とおけばよい.

Rationality

$\pi : X \to Z$ 正規射影代数多様体の全射正則写像で連結ファイバーをもつもの

X: canonical singularities のみをもつ

K_X は relatively nef でないとする

H: X上の ample因子

$\Longrightarrow$ $r \underset{\mathrm{def}}{=} \max\{t \in \mathbb{R} ;\ H + tK_X \text{ relatively nef}\} \in \mathbb{Q}$.

Stability

$\pi : X \to Z$ 正規射影多様体の全射正則写像

X: canonical singularities のみをもつ

F: good relative face

$\Longrightarrow$ Fは good face になる.

系4 $\varphi: X \longrightarrow W$ を good face に対応した contraction とする。このとき

$$\mathrm{Im}(\varphi^*: \mathrm{Pic}\, W \to \mathrm{Pic}\, X) = \{ D \in \mathrm{Pic}\, X \,;\, (D.z) = 0 \text{ for } \forall z \in F \}$$

特に次は完全列：

$$0 \longrightarrow N^1(W) \longrightarrow N^1(X) \longrightarrow N^1(X/W) \longrightarrow 0.$$

このことは cone $\overline{NE}(X)$ が good face F で角をもつことを示しています。だから $\overline{NE}(X)$ は polyhedral に非常に近いわけです。

上に述べた主定理と minimal model の関係は以下のとうりです。このプログラムは Reid 氏によるものですが、最近森氏は別の方向で minimal model を3次元の場合に作ることに成功したといううわさがあります。何はともあれ Reid 式のやり方は次のようなものです。まず非特異射影多様体 X_0 から出発します。求める minimal model はカテゴリー $\mathcal{C}(X_0) = \{X$: 正規射影多様体；$\mathbb{Q}$-factorial で terminal singularities をもつ，X_0 と双有理同値$\}$ の中にあるはずだと考えます。$X \in \mathcal{C}(X_0)$ について，K_X が nef ならば これが minimal model です。もしもそうでなければ weak cone theorem によって good extremal ray R が存在し contraction theorem により R の contraction $\varphi: X \to W$ をつくります。$A \subset X$, $B \subset W$ を $\varphi|_{X-A}: X-A \simeq W-B$ となるような最小の代数的部分集合にとります。$a = \dim A$, $b = \dim B$ としたとき R は type (a, b) とよばれます。

(イ) $a = n$ のとき：このときは $\dim W < \dim X$ であり，φ の一般ファイバー X_w は $\mathbb{Q}$-Fano 多様体（即ち，

$-K_{X_W}$ は ample）になるので，$\varphi: X \to W$ を minimal $\mathbb{Q}$-Fano ファイバー空間と呼びます。このとき X_w は uniruled になると予想されています。この予想が正しければ X も uniruled になるので，これで満足することにします。

(ロ) $a = n-1$ のとき：これは good case です。このときは再び $Z \in \mathcal{C}(X_0)$ となりしかも Picard 数は 1つ下がります：$\rho(Z) = \rho(X_0) - 1$．つまり曲面の場合の (-1)-curve の contraction と同じになります。

(ハ) $a < n-1$ のとき：これは X が 3次元以上で特異点をもつか，又は X が 4次元以上のときに起こる全く新しい現象でまだよくわかってはいません。Reid 氏は X が toric 多様体（つまり代数的トーラスが dense に act しているとき）のときを調べて次のように予想しました：$\oplus_{m\geq 0} \mathcal{O}_Z(mK_Z)$ は $\mathcal{O}_Z$-多元環の層として有限生成で $X_1 = \mathrm{Proj}\,(\oplus_{m\geq 0} \mathcal{O}_Z(mK_Z))$ とおくと $X_1 \in \mathcal{C}(X_0)$ となり，しかも X_1 は X よりも"改善"されている。X が 3次元で曲面の semi-stable な退化から来ているときはこの予想が正しいことを角田氏が示しました。

結局(ハ)の場合の予想が正しければ，$\mathcal{C}(X_0)$ の中に minimal model か又は minimal $\mathbb{Q}$-Fano ファイバー空間が存在することになります。上記の話は relative な場合 $\pi: X_0 \to Z$ から出発しても同様です。（角田氏の理論はこれに相当します。）また射影多様体の双有理正則写像の分解についても応用できます。(cf [3]).

§3. 証明のスケッチ

詳しくは "Cone of curves ..." を御覧下さい。

Contractionの証明

定義より特異点除去 $f_1: Y_1 \to X$ が存在して

$$K_{Y_1} = f^*K_X + \sum b_i G_i, \quad b_i \geq 0$$
$$G = \sum G_i \text{ は正規交叉}$$

とできる。$A_1 = K_{Y_1} - f^*K_X$, $D_1 = f_1^*D$ とおくと系3より

$$H^0(Y_1, \mathcal{O}_{Y_1}(pf_1^*D + \ulcorner A_1 \urcorner)) \neq 0$$

for $p \gg 0$。従って $H^0(X, \mathcal{O}_X(pD)) \neq 0$ for $p \gg 0$.
従って linear system $|pD|$ を考えることができます。その base locus $Bs|pD|$ を考察します。p を1つ fix し $Bs|pD| \neq \phi$ と仮定します。再び特異点除去 $f: Y \to X$ をとり

$$K_Y = f^*K_X + \sum a_i F_i, \quad a_i \geq 0$$
$$f^*|pH| = |L| + \sum r_i F_i, \quad |L| \text{ free}$$
$$\sum r_i F_i \text{ fixed part}$$
$$f^*(aH - K_X) - \sum \delta_i F_i \text{ ample } (0 < \delta_i \ll 1)$$
$$F = \sum F_i \text{ は正規交叉}$$

となるようにします。ここで Kodaira の lemma: nef & big ならば ample より大きい を使っています。次の量を定義します。(これがキーです。"log" との関係がありそうです。)

$$c = \min\left\{\frac{a_i + 1 - \delta_i}{r_i}\right\}$$

δ_i は小さいので $c > 0$ となります。ample というのは open condition ですから δ_i をうまくとって、

$$-cr_0 + a_0 - \delta_0 = -1$$
$$-cr_i + a_i - \delta_i > -1 \quad \text{for } i \neq 0$$

とできます。$A = \sum_{i \neq 0}(-cr_i + a_i - \delta_i)F_i$, $B = F_0$ とします。

次の $\mathbb{Q}$-divisor を考えます：

$$N = p'f^*D + A - B - K_Y$$
$$\approx cL + f^*((p'-cp)D - K_X) - \sum \delta_i F_i$$

ここで $p' \geqq cp + a$ とすると N は ample になり 消滅定理より $H^1(Y, \mathcal{O}_Y(p'f^*D + \ulcorner A \urcorner - B)) = 0$

が出ます。従って

$$H^0(Y, \mathcal{O}_Y(p'f^*D + \ulcorner A \urcorner)) \twoheadrightarrow H^0(B, \mathcal{O}_B(p'f^*D + \ulcorner A \urcorner))$$

再び 系3 を使うと最後の H^0 は 0 でないことがわかります。$f_*\ulcorner A \urcorner = 0$ に注意すると $B \not\subset Bs|p'D|$ となります。一方 $B \subset Bs|pD|$ でしたから $p|p'$ ならば $Bs|p'D| \subsetneqq Bs|pD|$ が出ました。あとは neotherian induction を使って簡単に $Bs|pD| = \phi$ for $p \gg 0$ が出ます。（証終）

Non-vanishing の証明

これも実は上の contraction の証明と同様にできます。X の次元に関する帰納法を使います。まず $D_3 \not\approx 0$ とします。仮定(2)で $pD_1 + qD_2 + sD_3 + A - K_X$ が ample としてよいことがまずわかります。$\alpha \in \mathbb{N}$ を $\alpha A \in Div(X)$ となるようにとります。Serre の消滅定理と Riemann-Roch の定理（最高次のみ）を使って，十分大きな整数 k をとると linear system $|\alpha k(p_1D_1 + q_1D_2 + s_1D_3 + A - K_X)|$ の元 M であって ある点 $x \notin Supp(A)$ での multiplicity が $\alpha k(n+1)$ 以上のものがとれることがわかります。ここで $q_1 - p_1 r < \varepsilon_0$ で s_1 は十分大きくとります。そして contraction の証明のときと同じような特異点除去 $f: Y \to X$ をとります。但し L，r_i はこの場合

$$f^*M = L + \sum r_i F_i$$

ととります。また $f^*A + \sum a_i F_i = \sum b_i F_i$ として $c = \min\{(b_i + 1 - \delta_i)/r_i\}$ と定義します。すると M の

作り方から $0 < c\alpha k < n/(n+1)$ となります。

$$A' = \Sigma_{i\neq 0}(-cr_i + b_i - 1)F_i, \quad B = F_0$$

とします。次の $\mathbb{Q}$-divisor を考えます：

$$N = f^*(pD_1 + qD_2 + sD_3) + A' - B - K_Y$$
$$\approx cL + f^*((p - c\alpha k p_1)D_1 + (q - c\alpha k q_1)D_2$$
$$+ (s - c\alpha k s_1)D_3 + (1 - c\alpha k)(A - K_X)) - \Sigma\delta_i F_i$$

再び N は ample になり消滅定理を使って全射

$$H^0(Y, \mathcal{O}_Y(f^*(pD_1 + qD_2 + sD_3) + \ulcorner A' \urcorner))$$
$$\twoheadrightarrow H^0(B, \mathcal{O}_B(f^*(pD_1 + qD_2 + sD_3) + \ulcorner A' \urcorner))$$

を得ます。帰納法の仮定から最後の H^0 は 0 でなく，$f_*\ulcorner A' \urcorner \leq \ulcorner A \urcorner$ に注意すると結局

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(pD_1 + qD_2 + sD_3 + \ulcorner A \urcorner)) \neq 0。$$

次に $D_3 \approx 0$ の場合を考えます。仮定(2)を使うと今度は D_1 と $D_1 + rD_2$ が nef になることがわかります。$D_1 + rD_2 \not\approx 0$ であれば上と同様の議論が成立します。もしも $D_1 + rD_2 \approx 0$ ならば結局 $D_1 \approx D_2 \approx D_3 \approx 0$ となります。消滅定理と Riemann-Roch の定理（χ は numerically class のみによるということ）より

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(pD_1 + qD_2 + sD_3 + \ulcorner A \urcorner))$$
$$= \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(\ulcorner A \urcorner)) \neq 0. \qquad \text{（証終）}$$

Rationality の証明

これもまた contraction theorem の証明と同様に行います。$r \notin \mathbb{Q}$ として矛盾を導きます。H は very ample としておく。また M を Z の ample 因子とします。まず non-vanishing を使って

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(pH + q\alpha K_X + s\pi^* M)) \neq 0$$

for $q\alpha - pr < \varepsilon$, $0 \ll q \ll s$ を導きます。ここで $\alpha \in \mathbb{N}$ は αK_X が Cartier になるようにとります。次に

前の手法を使って ある p, q があって $0 < q\alpha - pr < \varepsilon$ でかつ $Bs|pH + q\alpha K_X + s\pi^*M| = \phi$ となることを示します。このとき $pH + q\alpha K_X + s\pi^*M$ は nef, 従って $pH + q\alpha K_X$ は relatively nef になります。これは r のとり方と矛盾します。 (証終)

Stability の証明

L を F に対応した good relative supporting function とします。Kleiman の判定条件から $pL - K_X$ は ample for $p \gg 0$ となります。M を Z の ample 因子とします。このとき non-vanishing theorem を適用して

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(pL + s\pi^*M)) \neq 0, \quad 0 \ll p \ll s$$

を得ます。前と同様にして ある p, s に対して $Bs|pL + s\pi^*M| = \phi$ を出します。更に s を大きくして $L' = pL + s\pi^*M$ が nef でかつ $L' - K_X$ が ample なようにとります。このとき L' が F の good supporting function になります。 (証終)

Weak cone theorem の証明

$\varphi : X \to W$ を good face F に対応した contraction とすると容易に $F = \overline{NE}(X/W) - \{0\}$ がわかります。従って次の補題を示せば十分です。(F の次元を順に下げていく)

補題 $\dim N_1(X/Z) \geq 2$ のとき,

$$\overline{NE}(X/Z) = \left(\overline{NE}_{K_X}(X/Z) + \sum_{L \neq 0} F_L\right)^-$$

ここで L は全ての $N^1_{\mathbb{Q}}(X/Z)$ で 0 にならない good relative supporting functions を亘る。

証明　右辺 $= B$ とする．明らかに $\overline{NE}(X/Z) \supset B$。両辺が一致しないとして矛盾を導きます。$\dim N_1(X/Z) \geq 2$ なので分離関数 $M \in N^1_{\mathbb{Q}}(X/Z)$ があり，

$$\begin{cases} M \text{ は } K_X \text{ の定数倍でない} \\ M > 0 \quad \text{on} \quad B - \{0\} \\ (M.z) < 0 \quad \text{for some } z \in \overline{NE}(X/Z). \end{cases}$$

M は $\overline{NE}_{K_X}(X/Z)$ 上正なのである relatively ample な $\mathbb{Q}$-Cartier divisor H と非負有理数 a があって $M = H + aK_X$ となる。Rationality より good relative supporting function $L = H + bK_X$ $(b \in \mathbb{Q})$ を得る。M は K_X の定数倍でないから $L \neq 0$。$F_L \subset B$ で $M > 0$ on $B - \{0\}$ より $a < b$。従って M は relatively ample となり矛盾。（証終）

参考文献

1. R. Elkik, Rationalité des singularités canoniques, Invent. Math., 64 (1981), 1-6
2. Y. Kawamata, A generalization of Kodaira-Ramanujam's vanishing theorem, Math. Ann., 261 (1982), 43-46
3. Y. Kawamata, Cone of curves of algebraic varieties, preprint
4. S. Kleiman, Toward a numerical theory of ampleness, Ann. of Math., 84 (1966), 293-344
5. S. Mori, Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective, Ann. of Math., 116 (1982), 133-176
6. M. Reid, Minimal models of canonical 3-folds, Algebraic Varieties and Analytic Varieties,

紀伊國屋, 1983, 131-180
7. M. Reid, Decompositions of toric morphisms, Arithmetic and Geometry II (Shafarevic volume), Birkhäuser, 1983, 395-418
8. M. Reid, Projective morphisms according to Kawamata, preprint
9. V. V. Shokurov, Theorem on non-vanishing, preprint
10. E. Viehweg, Vanishing theorems, J. reine angew. Math., 335 (1982), 1-8.